日 付	学 科	学 年	番 号	名 前
／				

第３章 5 「確率変数の関数」「統計量と標本分布」 第１回

1. 袋の中に $1, 2$ の数字の書かれた玉が 1 個ずつ入っている．この袋の中から 1 個ずつ復元抽出するとき，1 回目に出る数を X_1，2 回目に出る数を X_2，$Y = X_1 + X_2$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) Y のとり得る値を求めよ．また，Y の確率分布表を作れ．

(2) $P(X_1 = 1) \times P(Y = 2)$ の値を求めよ．

(3) $P(X_1 = 1, Y = 2)$ の値を求めよ．

(4) X_1，Y は互いに独立であるかを調べよ．

2. 確率変数 X_1, X_2 の平均と分散がそれぞれ $E[X_1] = 8$，$V[X_1] = 2$，$E[X_2] = 12$，$V[X_2] = 3$ であるとき，次の値を求めよ．

(1) $\dfrac{X_1 + X_2}{2}$ の平均

(2) 確率変数 X_1 と X_2 が互いに独立であるとき，X_1X_2 の平均

(3) 確率変数 X_1 と X_2 が互いに独立であるとき，$\dfrac{X_1 + X_2}{2}$ の分散

例題 ある工場では，直径が平均 10.0mm，標準偏差 0.2mm の正規分布に従う鉄製の丸棒を大量に製造している．製造ラインより無作為に 4 本の丸棒を選んだとき，その 4 本の直径の標本平均 $\overline{X}$ が $9.8 \leqq \overline{X} \leqq 10.2$ となる確率を求めよ．

解 無作為に選んだ 4 本の丸棒の直径をそれぞれ $X_i\ (1 \leqq i \leqq 4)$ とする．
ここで，$E(X_i) = \mu = 10.0$，$V(X_i) = \sigma^2 = 0.2^2$ である．各 $X_i\ (1 \leqq i \leqq 4)$ は互いに独立であるから

$$E(\overline{X}) = E\left[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}\right] = \frac{1}{4}\Big(E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4]\Big) = \frac{4\mu}{4} = \mu = 10.0$$

$$V(\overline{X}) = V\left[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}\right] = \frac{1}{4^2}\Big(V[X_1] + V[X_2] + V[X_3] + V[X_4]\Big) = \frac{4\sigma^2}{4^2} = \frac{\sigma^2}{4} = \frac{0.2^2}{4} = 0.1^2$$

すなわち，$\overline{X}$ は $N\Big(10.0\,,\, 0.1^2\Big)$ に従う．

$$P(9.8 \leqq \overline{X} \leqq 10.2) = P\left(\frac{9.8 - 10.0}{0.1} \leqq Z \leqq \frac{10.2 - 10.0}{0.1}\right) = P(-2 \leqq Z \leqq 2) = 0.9544$$

3. ある工場では，内容量 X が平均 $120\,(\mathrm{ml})$，分散 $2^2\,(\mathrm{ml}^2)$ の正規分布に従うビン入りの化粧水を大量に製造している．製造ラインより無作為に 4 ビンを選んだとき，その 4 ビンの内容量の標本平均 $\overline{X}$ が $119 \leqq \overline{X} \leqq 121$ (単位：ml) となる確率を求めよ．