第 3 章 5 「確率変数の関数」「統計量と標本分布」 第 1 回

解答

1. (1) $2, 3, 4$

k	2	3	4	計
$P(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $\frac{1}{8}$

(3) $\frac{1}{4}$

(4) 独立ではない

2. (1) 10　(2) 96　(3) $\frac{5}{4}$

3. 0.6826

解説

1. (1) 復元抽出であるから，X_1 および X_2 はそれぞれ，1, 2 の値をとり得る．

よって $Y = X_1 + X_2$ のとり得る値は，小さい方から $2, 3, 4$ である．

$$P(Y=2) = P(X_1=1, X_2=1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y=3) = P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=1) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 2 = \frac{2}{4}$$

$$P(Y=4) = P(X_1=2, X_2=2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

以上より，**解答**の確率分布表を得る．

(2) $P(X_1=1)\times P(Y=2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

(3) $P(X_1=1,\, Y=2)$ の値は，$X_1=1$，$X_2=1$ となるときの確率であるから

$P(X_1=1,\, Y=2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(4) (2) および (3) の結果から

$P(X_1=1,\, Y=2) \fallingdotseq P(X_1=1)\times P(Y=2)$

であるから，X_1 と Y は互いに独立ではない．

2. (1) $E\left[\frac{X_1+X_2}{2}\right] = \frac{1}{2}E[X_1+X_2]$

$= \frac{1}{2}\Big(E[X_1]+E[X_2]\Big) = \frac{1}{2}(8+12) = 10$

[注意] X_1, X_2 が独立であるかないかに関わらず，$E[X_1+X_2] = E[X_1]+E[X_2]$ は成立する．

(2) X_1 と X_2 が互いに独立より

$E[X_1X_2] = E[X_1]E[X_2] = 8\times 12 = 96$

(3) X_1 と X_2 が互いに独立より

$V\left[\frac{X_1+X_2}{2}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V[X_1+X_2]$

$= \frac{1}{4}\Big(V[X_1]+V[X_2]\Big) = \frac{1}{4}(2+3) = \frac{5}{4}$

3. 無作為に選んだ 4 本のビンの内容量をそれぞれ $X_i\ (1 \leqq i \leqq 4)$ とする．ここで，$E[X_i] = \mu = 120$, $V[X_i] = \sigma^2 = 2^2$ である．

各 $X_i\ (1 \leqq i \leqq 4)$ は互いに独立であるから

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}\right] = \frac{\mu\times 4}{4} = \mu = 120,$$

$$V[\overline{X}] = V\left[\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}\right] = \frac{\sigma^2\times 4}{4^2} = \frac{\sigma^2}{4} = 1$$

すなわち，$\overline{X}$ は $N\left(120,\, 1^2\right)$ に従う．

$P(119 \leqq \overline{X} \leqq 121)$

$= P\left(\frac{119-120}{1} \leqq Z \leqq \frac{121-120}{1}\right)$

$= P(-1 \leqq Z \leqq 1)$

$= P(Z \geqq -1) - P(Z \geqq 1)$

$= P(Z \leqq 1) - P(Z \geqq 1)$

$= \Big\{1 - P(Z \geqq 1)\Big\} - P(Z \geqq 1)$

$= 1 - 2\times P(Z \geqq 1) = 1 - 2\times 0.1587 = 0.6826$