第3章 2 「二項分布」「ポアソン分布」 第2回

解答

1. (1) $B\left(4,\ \dfrac{2}{5}\right)$

(2) i) $\dfrac{216}{625}$, ii) $\dfrac{96}{625}$, iii) $\dfrac{16}{625}$

2. (1) 平均 30 ， 分散 20

(2) 平均 25 ， 分散 $\dfrac{75}{4}$

(3) 平均 100 ， 分散 80

3. $P(X=15)={}_{40}\mathrm{C}_{15}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{15}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{25}$

$E[X]=10,\ V[X]=\dfrac{15}{2}$

4. 0.406

5. 0.982

解説

1. (1) 二項分布 $B\left(4,\ \dfrac{2}{5}\right)$ に従う．

(2) i) $P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{216}{625}$

ii) $P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{2}{5}\right)^3\left(\dfrac{3}{5}\right)^1=\dfrac{96}{625}$

iii) $P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{2}{5}\right)^4\left(\dfrac{3}{5}\right)^0=\dfrac{16}{625}$

2. (1) 平均 $E[X]=np=90\times\dfrac{1}{3}=30$

分散 $V[X]=npq=90\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=20$

(2) 平均 $E[X]=np=100\times\dfrac{1}{4}=25$

分散 $V[X]=npq=100\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{75}{4}$

(3) 平均 $E[X]=np=500\times\dfrac{1}{5}=100$

分散 $V[X]=npq=500\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=80$

3. 確率変数 X は，二項分布 $B\left(40,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う．

$P(X=15)={}_{40}\mathrm{C}_{15}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{15}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{25}$

$E[X]=np=40\times\dfrac{1}{4}=10$

$V[X]=npq=40\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{2}$

4. 平均が 2 だから $\lambda=2$ となる．

よって，X はポアソン分布 $P_o(2)$ に従うから

$P(X=k)=e^{-2}\dfrac{2^k}{k!}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

$$\begin{aligned}P(X\leqq 1)&=P(X=0)+P(X=1)\\&=e^{-2}\times\frac{2^0}{0!}+e^{-2}\times\frac{2^1}{1!}\\&=\frac{1}{e^2}\times(1+2)\\&=\frac{3}{e^2}=0.406\end{aligned}$$

もしくは，教科書 p.165 のポアソン分布表より

$$\begin{aligned}P(X\leqq 1)&=P(X=0)+P(X=1)\\&=0.13534+0.27067\\&=0.406\end{aligned}$$

5. 1000 個に 1 個の割合で不良品が含まれることから

$p=\dfrac{1}{1000}=0.001$

したがって，箱の中の不良品の数を X とすると，

確率変数 X は二項分布 $B(200, 0.001)$ に従う．

$n=200$ は大きく，$p=0.001$ は小さいことから，

$\lambda=np=200\times0.001=0.2$ より $B(200, 0.001)$ を

$P_o(0.2)$ で近似する．

$P(X=k)\fallingdotseq e^{-0.2}\dfrac{0.2^k}{k!}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

$$\begin{aligned}P(X\leqq 1)&\fallingdotseq P(X=0)+P(X=1)\\&=e^{-0.2}\frac{0.2^0}{0!}+e^{-0.2}\frac{0.2^1}{1!}\\&=\frac{1}{e^{0.2}}(1+0.2)=0.982\end{aligned}$$

もしくは，教科書 p.165 のポアソン分布表より

$$\begin{aligned}P(X\leqq 1)&\fallingdotseq P(X=0)+P(X=1)\\&=0.81873+0.16375\\&=0.982\end{aligned}$$