第3章 2 「二項分布」「ポアソン分布」 第1回

解答

1. (1) $B\left(4,\,\dfrac{3}{4}\right)$

(2) i) $\dfrac{54}{256}\left(=\dfrac{27}{128}\right)$, ii) $\dfrac{108}{256}\left(=\dfrac{27}{64}\right)$

2. (1) 平均 40 ， 分散 20

(2) 平均 90 ， 分散 $\dfrac{45}{2}$

(3) 平均 36 ， 分散 30

3. $P(X=20)={}_{80}\mathrm{C}_{20}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{60}$

$E[X]=60$，$V[X]=15$

4. 0.080

5. 0.440

解説

1. (1) 二項分布 $B\left(4,\,\dfrac{3}{4}\right)$ に従う．

(2) i) $P(X=2)={}_{4}\mathrm{C}_{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2}=\dfrac{54}{256}$

ii) $P(X=3)={}_{4}\mathrm{C}_{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1}=\dfrac{108}{256}$

2. (1) 平均 $E[X]=np=80\times\dfrac{1}{2}=40$

分散 $V[X]=npq=80\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=20$

(2) 平均 $E[X]=np=120\times\dfrac{3}{4}=90$

分散 $V[X]=npq=120\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{45}{2}$

(3) 平均 $E[X]=np=216\times\dfrac{1}{6}=36$

分散 $V[X]=npq=216\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=30$

3. 確率変数 X は，二項分布 $B\left(80,\,\dfrac{3}{4}\right)$ に従う．

$P(X=20)={}_{80}\mathrm{C}_{20}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{60}$

$E[X]=np=80\times\dfrac{3}{4}=60$

$V[X]=npq=80\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=15$

4. 平均が 1 だから $\lambda=1$ となる．

よって，X はポアソン分布 $P_o(1)$ に従うから

$P(X=k)=e^{-1}\dfrac{1^k}{k!}\quad(k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$

$$
\begin{aligned}
P(X\leqq 2)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\
&=e^{-1}\times\frac{1^0}{0!}+e^{-1}\times\frac{1^1}{1!}+e^{-1}\times\frac{1^2}{2!}\\
&=\frac{1}{e}\times\left(1+1+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{1}{e}\times\frac{5}{2}=0.9197
\end{aligned}
$$

もしくは，教科書 p.165 のポアソン分布表より

$$
\begin{aligned}
P(X\leqq 2)&=P(X=0)+P(X=1)+(X=2)\\
&=0.36788+0.36788+0.18394\\
&=0.9197
\end{aligned}
$$

したがって求める確率は

$$
\begin{aligned}
P(X\geqq 3)&=1-P(X\leqq 2)\\
&=1-0.9197=0.080
\end{aligned}
$$

5. 副作用が出た人数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B(5000,0.001)$ に従う．

$n=5000$ は大きく，$p=0.001$ は小さいことから $\lambda=np=5000\times0.001=5$ より $B(5000,0.001)$ を $P_o(5)$ で近似する．

$P(X=k)\fallingdotseq e^{-5}\dfrac{5^k}{k!}\quad(k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$

$$
\begin{aligned}
P(X\leqq 4)&\fallingdotseq P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\
&\quad+P(X=3)+P(X=4)\\
&=e^{-5}\frac{5^0}{0!}+e^{-5}\frac{5^1}{1!}+e^{-5}\frac{5^2}{2!}+e^{-5}\frac{5^3}{3!}+e^{-5}\frac{5^4}{4!}\\
&=\frac{1}{e^5}\left(1+5+\frac{25}{2}+\frac{125}{6}+\frac{625}{24}\right)\\
&=\frac{1}{e^5}\times\frac{523}{8}=\frac{1}{e^5}\times65.375=0.440
\end{aligned}
$$

もしくは，教科書 p.165 のポアソン分布表より

$$
\begin{aligned}
P(X\leqq 4)&\fallingdotseq P(X=0)+P(X=1)+(X=2)\\
&\quad+P(X=3)+(X=4)\\
&=0.00674+0.03369+0.08422\\
&\quad+0.14037+0.17547\\
&=0.440
\end{aligned}
$$