日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第 4 章 3 「回転を表す線形変換」「直交行列と直交変換」 第 1 回

1. 次の三角関数の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}$　　(2) $\cos\dfrac{\pi}{4}$　　(3) $\cos\dfrac{3}{4}\pi$　　(4) $\sin\dfrac{\pi}{2}$

2. 平面上で原点のまわりに θ 回転させる変換は行列 $T(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ により表される．次の $T(\theta)$ を求めよ．

(1) $T\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(2) $T\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

例題 座標平面上の点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点 P' の座標を求めよ．

解 座標平面上の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させる線形変換を表す行列は $\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

で与えられる．したがって，$\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$ より点 P' の座標は $\left(-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$

となる．

3. 座標平面上の点 $\mathrm{P}(3,\ 1)$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点 P' の座標を求めよ．

例題 行列 $A=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5}\end{pmatrix}$ が直交行列であることを確かめよ．

解 行列 A の 1 列目および 2 列目を $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{4}{5}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{3}{5}\end{pmatrix}$ とおく．

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=1,\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=1,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=0$$

となるため，直交行列である．

4. 次の行列の中から，直交行列を選べ．

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad A_3=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix},\qquad A_4=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$