第 4 章 5 「行列の対角化」「対角化可能の条件」 第 3 回

解答

1. (1) 対角化可能

与えられた行列を A, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおいて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(2) 可能でない

2. (1) 可能でない

(2) 対角化可能

与えられた行列を B, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおいて,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

解説

1. (1) 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+5) = 0$$

より，固有値 $\lambda = 1,\ -5$ を得る．それぞれ固有ベクトルを求めると

$$c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ (c_1 \fallingdotseq 0,\ c_2 \fallingdotseq 0)$$

となる．$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくことにより，A の対角化行列が得られ，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ となる．

(2) 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 = 0$$

より，固有値 $\lambda = 2$ (2 重解) を得る．固有ベクトルを求めると，$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \fallingdotseq 0)$ のみであり，対角化できない．

2. (1) 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

より，固有値 $\lambda = 2$ (3 重解) を得る．固有ベクトルを求めると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$x = 0,\ y = 0$ を得る．したがって，固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \fallingdotseq 0)$ となる．

固有ベクトルは 1 つしか取れないので，対角化可能でない．

(2) 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0$$

から，固有値 $\lambda = 1,\ 2,\ 4$ を得る．それぞれの固有ベクトルを求めると,

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$(c_1 \fallingdotseq 0,\ c_2 \fallingdotseq 0,\ c_3 \fallingdotseq 0)$$

となる．

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくことにより，B の対角化行列が得られ,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．