第 4 章 4 「固有値と固有ベクトルの計算」 第 1 回

解答

1. (1) $x=3,\ -6$ (2) $x=-2,\ -4$ (3) $x=\pm 8$

2. 固有値・固有ベクトルは順に対応

(1) $\lambda=2,\ 3$ (2) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ (c_1\fallingdotseq 0,\ c_2\fallingdotseq 0)$

解説

1. (1) $(x-3)(x+6)=0$ より $x=3,\ -6$ (2) $(x+2)(x+4)=0$ より $x=-2,\ -4$

(3) $(x-8)(x+8)=0$ より $x=\pm 8$

2. (1) 固有方程式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}0-\lambda & 2\\ -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(5-\lambda)+6=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

より，固有値 $\lambda=2,\ 3$ を得る．

(2) <u>$\lambda=2$ のとき</u>

$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\-3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から $x-y=0$ つまり，$x=y$ を得る．よって，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

となるから，$c_1=y$ とおいて，固有値 2 に対する固有ベクトル $c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(c_1\fallingdotseq 0)$ を得る．

<u>$\lambda=3$ のとき</u>

$(A-3E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から $3x-2y=0$ つまり，$x=\dfrac{2}{3}y$ を得る．固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}y\\y\end{pmatrix}=\frac{y}{3}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

となるから， $c_2=\dfrac{y}{3}$ とおいて，固有値 3 に対する固有ベクトル $c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $(c_2\fallingdotseq 0)$ を得る．

[**注意**] 固有ベクトルを求める際，任意定数 $c_1,\ c_2$ の置き方により固有ベクトルの形が，模範解答に比べ見かけ上異なった形になることがあるが，計算が間違っていなければそれでも正解である．