第 4 章 3 「回転を表す線形変換」「直交行列と直交変換」 第 1 回

解答

1. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4) 1

2.

(1) $T\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$　(2) $T\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $A_1,\ A_4$

解説

1. $180^\circ = \pi$ (rad) に注意する．

(1) 与式 $= \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) 与式 $= \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) 与式 $= \cos 135^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4) 与式 $= \sin 90^\circ = 1$

2.

(1) $T\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) $T\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. 座標平面上の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させる線形変換を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ で与えられる．したがって，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

より点 P' の座標は $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$ となる．

4. 例題のように，行列を構成している列を列ベクトルと見て，すべての列ベクトルの大きさが 1 かつ相異なる列ベクトルがすべて互いに直交している行列を探す.