第 4 章 2 「合成変換と逆変換」 第 3 回

解答

1. (1) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 25 & -1 \end{pmatrix}$, $(-8,\ 26)$　　(2) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}$, $(8,\ 13)$

2. (1) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\left(-\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$

4. 直線 $2x - y = -3$

解説

1. (1) 合成変換 $f \circ g$ を表す行列は $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 25 & -1 \end{pmatrix}$ により与えられる．点 $(1,\ -1)$ の $f \circ g$ による像は $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 25 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 26 \end{pmatrix}$ より，点 $(-8,\ 26)$ となる．

(2) 合成変換 $g \circ f$ を表す行列は $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}$ により与えられる．点 $(1,\ -1)$ の $f \circ g$ による像は $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$ より，点 $(8,\ 13)$ となる．

2.
(1) f^{-1} を表す行列は f を表す行列の逆行列により与えられる．したがって，$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) g^{-1} を表す行列は g を表す行列の逆行列により与えられる．したがって，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) まず，$f \circ g$ を与える行列を求めると $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ となる．$(f \circ g)^{-1}$ はこの行列の逆行列で表されるから，$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

3. 点 $\mathrm{P}'(-1,\ 1)$ に移されるもとの点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

より，点 P の座標 $\left(-\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ を得る．

4. 線形変換 f を表す行列が正則であることに注意する．直線 $x - 8y = 9$ 上の点を $(x,\ y)$，もとの図形上の点を $(x',\ y')$ とすると $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる．点 $(x,\ y)$ は $x - 8y = 9$ つまり $y = \dfrac{x-9}{8}$ を満たすから

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x-9}{8} \end{pmatrix}$ となる．両辺に左から逆行列を掛けて，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x-9}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x-9}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-9}{8} \\ \dfrac{x+3}{4} \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-9}{8} \cdots ① \\ y' = \dfrac{x+3}{4} \cdots ② \end{cases}$$

を得る．x を消去するために，$2 \times ① - ②$ とし，整理すると $2x' - y' = -3$ となる．よって，もとの図形は直線 $2x - y = -3$ となることがわかる．