第4章 1 「線形変換の定義」「線形変換の基本性質」 第1回

解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $(1,\ 3)$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $(0,\ 1)$

2. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$

解説

1. 線形変換を表す行列は，行列の積に変形することにより求められる．

(1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，また，$x=1,\ y=0$ を代入して $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ より，点 $(1,\ 0)$ の像は点 $(1,\ 3)$ となることがわかる．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，また，$x=1,\ y=0$ を代入して $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より，点 $(1,\ 0)$ の像は点 $(0,\ 1)$ となることがわかる．

2. 問題の条件より，$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となっている．教科書 125 ページ (4) を用いて，これらをまとめて書くと $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ となる．ここで，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots ①$$

$|B| = 1+2 = 3 \fallingdotseq 0$ より，B は正則だから，①の両辺の右から B^{-1} を掛けて

$$(AB)B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}B^{-1}$$

左辺 $= (AB)B^{-1} = A(BB^{-1}) = A$ および $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となることに注意して，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. (1) $f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(2) $f(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(3) $f(3\boldsymbol{p}+4\boldsymbol{q}) = f(3\boldsymbol{p}) + f(4\boldsymbol{q}) = 3f(\boldsymbol{p}) + 4f(\boldsymbol{q}) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$