第１章 5 「直線の方程式」「平面の方程式」「球の方程式」 第２回

解答

1. t は実数

(1) $x=-3+t,\ y=4,\ z=2+3t \quad \left(x+3=\dfrac{z-2}{3},\ y=4\right)$

(2) $x=4-2t,\ y=-5+4t,\ z=-2+3t \quad \left(\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z+2}{3}\right)$

これ以外の次のいずれも正解である.

$x=2-2t,\ y=-1+4t,\ z=1+3t \quad \left(\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{3}\right)$

$x=4+2t,\ y=-5-4t,\ z=-2-3t \quad \left(\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+2}{-3}\right)$

$x=2+2t,\ y=-1-4t,\ z=1-3t \quad \left(\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-1}{-3}\right)$

2. (1) $3x+y=6$ (2) $3x+y+4z=9$

3. (1) $x^2+y^2+z^2=16$

(2) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=9$

(3) $(x-4)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14$

4. (1) 中心 $(1,\ 3,\ 5)$ 半径 1 (2) 中心 $(0,\ 5,\ -1)$ 半径 4

解説

1. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ である直線の方程式は

$x=x_0+v_1t,\ y=y_0+v_2t,\ z=z_0+v_3t \quad$ (t は実数)

(1) $y=4+0t=4$ だから，この直線は平面 $y=4$ 上にある.

(2) 直線が通る点として $(4,\ -5,\ -2)$，方向ベクトルとして $\big(2-4,\ -1-(-5),\ 1-(-2)\big)=(-2,\ 4,\ 3)$ を選ぶと，直線の方程式は $x=4-2t,\ y=-5+4t,\ z=-2+3t$ (t は実数)

これより $t=\dfrac{x-4}{-2},\ t=\dfrac{y+5}{4},\ t=\dfrac{z+2}{3}$ だから，t を消去して $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z+2}{3}$

直線が通る点として $(2,\ -1,\ 1)$，方向ベクトルとして $\big(4-2,\ -5-(-1),\ -2-1\big)=(2,\ -4,\ -3)$ も選べるから，解答に載せた他の 3 つのいずれでもよい.

2. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面の方程式は

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

(1) $3(x-2)+1(y-0)+0(z-3)=0$ より $3x+y=6$

(2) 求める平面は $\vec{n}=(3,\ 1,\ 4)$ に垂直だから $3(x-1)+1(y+2)+4(z-2)=0$

よって $3x+y+4z=9$

3. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を中心とする半径 r の球の方程式は $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ である.

(3) 中心の座標は $\left(\dfrac{6+2}{2},\ \dfrac{3+1}{2},\ \dfrac{5+(-1)}{2}\right)=(4,\ 2,\ 2)$

半径は $\sqrt{(6-4)^2+(3-2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{14}$

よって，求める球の方程式は $(x-4)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14$

4. (1) 方程式を変形すると

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9+z^2-10z+25+34=1+9+25 \qquad \therefore\ (x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=1$$

よって，中心は $(1,\ 3,\ 5)$，半径は 1 である.

(2) 方程式を変形すると

$$x^2+y^2-10y+25+z^2+2z+1+10=25+1 \qquad \therefore\ x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=16$$

したがって，中心は $(0,\ 5,\ -1)$，半径は 4 である.