第 1 章 2 「ベクトルの内積」「ベクトルの平行と垂直」 第 1 回

解答

1. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(3) 0

2. (1) 6　(2) $-7\sqrt{3}$

3. (1) 4　(2) -5

4. (1) $45^\circ\left(=\dfrac{\pi}{4}\right)$　(2) $90^\circ\left(=\dfrac{\pi}{2}\right)$

5. (1) $k=-\dfrac{1}{7}$　(2) $k=\dfrac{2}{3}$

6. (1) $k=-2$　(2) $k=2,\ -3$

解説

1. 三角比の定義に従って求める．

2. 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ である．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times3\times\cos60^\circ=4\times3\times\dfrac{1}{2}=6$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=7\times2\times\cos150^\circ=7\times2\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-7\sqrt{3}$

3. $\vec{a}=(a_1,\ a_2),\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ である．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+(-1)\times2=4$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-3)+4\times1=-5$

4. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求める．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{10}$ だから
$\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore$　$\theta=45^\circ\left(=\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ だから　$\cos\theta=0$
よって　$\theta=90^\circ\left(=\dfrac{\pi}{2}\right)$

5. (1) ベクトルの平行条件より，$\vec{b}=m\vec{a}$ となる実数 m が存在する．$(k+1,\ 2k)=m(3,\ -1)$ より
$k+1=3m,\ 2k=-m$
この連立方程式を解いて　$k=-\dfrac{1}{7}$

(2) ベクトルの平行条件より，$\vec{b}=m\vec{a}$ となる実数 m が存在する．$(5,\ k+1)=m(2,\ k)$ より
$5=2m,\ k+1=mk$
この連立方程式を解いて　$k=\dfrac{2}{3}$

6. (1) ベクトルの垂直条件より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$(k,\ 2)\cdot(-3,\ 2k+1)=-3k+2(2k+1)=-3k+4k+2=k+2=0$
よって　$k=-2$

(2) ベクトルの垂直条件より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$(k,\ 3)\cdot(k+1,\ -2)=k(k+1)-6=k^2+k-6=0$
この 2 次方程式を解いて　$k=2,\ -3$